**Feuille 8 – Applications linéaires (Suite)**

Exercice 1 :

Dans , on pose la base canonique de , et on définit par :

1. Trouver une expression de pour tout .
2. Déterminer une base et la dimension de . Est-ce un endomorphisme injectif ? surjectif ? bijectif ?
3. Déterminer le rang de , puis déterminer une base de l’image de .
4. Montrer que .

Exercice 2 :

Soit un -espace vectoriel. Soit un sev de , notons un supplémentaire de dans . Ainsi pour tout , il existe , tels que .

On dit qu’un endomorphisme est un « projecteur sur par rapport à  » si pour tout , on a

1. Soit un projecteur de . Montrer que . *(On admettra la réciproque dans la suite de l’exercice)*.
2. Soient et deux projecteurs de différents et non nuls.
3. Soit tel que . Montrer que .
4. Montrer que la famille est nécessairement libre.
5. Soient et deux projecteurs de .
6. Supposons que soit un projecteur. Montrer que , puis que
7. Montrer que est un projecteur de si et seulement si .

Exercice supplémentaire :

Soient :

1. Montrer que
2. En déduire la valeur de et .